ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2016

---

**1.** Μια λεπτή πλάκα πυκνότητας $\rho(x, y) = y + 1$ φράσσεται από τις καμπύλες $x = y^2$ και $x = 2y - y^2$.

(α) Να βρείτε τη μάζα και τη ροπή αδράνειας της πλάκας ως προς τον άξονα $x$. [2]

(β) Αν η πλάκα έχει σταθερή πυκνότητα $\rho(x, y) = \rho_0$, να βρεθεί η τιμή $\rho_0$ ώστε η μάζα της να παραμένει ίση με τη τιμή του πρώτου ερωτήματος. [1]

**2.** Έστω το πεδίο δυνάμεων: $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + yz)\hat{\imath} + \alpha(y + 2xz)\hat{\jmath} + (xy + z)\,\hat{k}$.

(α) Να βρείτε τη σταθερά $\alpha$ ώστε το πεδίο να είναι συντηρητικό και να ορίσετε μια συνάρτηση δυναμικού $f = f(x, y, z)$ τέτοια ώστε: $\vec{F} = -\vec{\nabla} f$. [2]

(β) Για τη τιμή της σταθεράς που βρήκατε να υπολογίσετε το έργο της δύναμης από το σημείο $(0, 0, 0)$ στο σημείο (1,1,1). [1]

**3.** Θεωρείστε το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = -ky \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρεθούν και να αξιολογηθούν ως προς την ευστάθειά τους τα κρίσιμα σημεία του συστήματος. [1]

(β) Να σχεδιάσετε το χώρο των φάσεων. [2]

**4.** (α) Να δείξετε ότι η εξίσωση Euler του συναρτησοειδούς $J[x] = \int L(t, x, \dot{x})\,\mathrm{d}t$, όπου $x \in C^2[a, b]$ και $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, μπορεί να γραφεί ως: [1]

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L - \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0.$$

(β) Να δείξετε ότι το ελάχιστο εμβαδόν μιας επιφάνειας εκ περιστροφής,

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x,$$

είναι η αλυσοειδής καμπύλη $y = c_1 \cosh(c_1 x + c_2)$, όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ σταθερές. [2]

---

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. Για την επιτυχία του μαθήματος απαιτούνται 5 μονάδες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!